PSAEN – 2007/08
Primeira Fase - Matemática

Resolução: Caio Guimarães, Rodolpho Castro, Victor Faria, Paulo Soares, Iuri Lima
Digitação: Caio Guimarães, Júlio Sousa.

Comentário da Prova:

A prova de matemática desse ano veio com um enfoque muito grande em cálculo. O nível de dificuldade das questões no geral se manteve o mesmo, com exceção de algumas questões que notavelmente vieram mais trabalhosas que o usual (como a questão 15 e a 19). Destaque para a questão 19, que em nossa opinião, será a com o maior índice de erros (até mesmo entre os alunos mais bem preparados) por ser uma questão que exigia um alto nível conceitual de aplicações de derivadas em construção de gráficos de funções. Gostaríamos de ressaltar a melhora em relação ao ano passado, uma vez que os enunciados (mais claros) não geram algum tipo de dúvida nem motivos para anulação (como foi o caso dos últimos 3 anos de prova).

Assuntos Abordados:
1. Números Complexos e Polinômios
2. Cálculo: Máximos e Mínimos de funções Reais (derivadas)
3. Fatoração, Trigonometria. Eq. da Circunferência
4. PG
5. Geometria : Áreas
6. Analítica no R³: Plano e Reta no R³
7. Cálculo: Integrais imediatas/ Trigonometria
8. Análise Combinatória: Probabilidade
9. Polinômios e P.A.
10. Geometria espacial: Volumes
11. Trigonometria: Soma de Arcos
12. Logaritmos
13. Sistema linear, Vetores no R³ (Produto misto)
14. Trigonometria
15. Cálculo: Retas tangentes a uma curva. Regra da Cadeia
16. Cálculo: Teorema da função inversa. Reta normal a uma curva
17. Cálculo: Derivada e Integral Imediata
18. Determinante (Laplace) e Polinômios. Binômio de Newton
19. Cálculo: Análise gráfica de uma função real.
20. Inequações do primeiro grau. Logaritmo

Questão 1

Sejam **a** e **b** números reais não nulos tais que a equação $x^5 + 4x^4 - x^3 + (2a+b)x^2 + (a-b-3)x + (ab+2) = 0$ admite duas e somente duas raízes nulas. Se z = a + bi é um número complexo, então o argumento de $\dfrac{\bar{z}}{1+z}$ é

a) $\text{arctg}(1)$

b) $\arccos\left(1/2\right)$

c) $\arccos\left(-1/2\right)$

d) $\text{arc sec}\left(2/\sqrt{3}\right)$

e) $\arccos(0)$

Resolução

$$x^5 + 4.x^4 - x^3 + (2a+b).x^2 + (a-b-3).x + (ab+2)$$

Para que o polinômio acima tenha 0 como raiz dupla, devemos ter:

$$\begin{cases} ab+2 \\ a-b-3=0 \\ 2a+b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{b} \\ a = b+3 \\ 2a+b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + 3b + 2 = 0 \\ 2a+b \neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad b = -1 ; a = 2$$

Logo:

$$z = 2 - i \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{z}}{1+z} = \frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i).(3+i)}{10} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{\bar{z}}{1+z}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{1/2}{1/2}\right) = \text{Arctg}(1)$$

Resposta: (A) Arctg1

Questão 2

O valor mínimo relativo da função *f*, de variável real x, definida por $f(x) = \dfrac{a^2}{sen^2 x} + \dfrac{b^2}{cos^2 x}$, onde a, b $\in \Re^*$, vale

a) $(a + 2|b|)^2$ b) $a^2 + b^2$ c) $2|ab|$ d) $(|a| + |b|)^2$ e) $2(a + b)^2$

Resolução

$$f(x) = \frac{a^2}{sen^2 x} + \frac{b^2}{cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{2.a^2.cos\,x}{sen^3 x} + \frac{2.b^2.senx}{cos\,x^3 x}$$

Analisando os pontos críticos:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2.cos\,x}{sen^3 x} = \frac{2.b^2.senx}{cos\,x^3 x} \quad \Leftrightarrow \quad tg^2 x = \frac{|a|}{|b|}$$

Verificando pelo teste da 2ª derivada se tais pontos são pontos de mínimo:

$$f'(x) = -2.a^2.ctgx.csc^2 x + 2.b^2.tgx.sec^2 x$$

$$= -2a^2.(ctgx).(1 + ctg^2 x) + 2b^2.(tgx).(1 + tg^2 x)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2a^2.csc^2 x + 6a^2.ctg^2 x.csc^2 x + 2.b^2.sec^2 x + 6b^2.tg^2 x.sec^2 x > 0 \;,\; \forall x$$

Como a 2ª derivada é sempre positiva, então nos pontos críticos encontrados teremos pontos de mínimo. Com isso:

$$f_{min}(x) = \frac{a^2}{sen^2 x} + \frac{b^2}{cos^2 x} \qquad = \frac{1}{cos^2 x}.\left(\frac{a^2}{tg^2 x} + b^2\right)$$

$$= (tg^2 x + 1).\left(\frac{a^2}{tg^2 x} + b^2\right) = \left(\frac{|a|}{|b|} + 1\right).\left(\frac{|a|.|a|}{|a|/|b|} + |b|.|b|\right)$$

$$= \frac{|a| + |b|}{|b|}.(|ab| + |b|) = (|a| + |b|)^2$$

Logo:

$$\boxed{\text{Resposta: (D)} \; (|a| + |b|)^2}$$

Questão 3 Considere a função *f*, de variável real x, definida por $f(x) = sen^6 x + cos^6 x + m(sen^4 x + cos^4 x)$, onde $m \in \Re$ é um valor que torna *f* constante. A equação da circunferência tangente ao eixo y, cujo centro está no ponto de interseção das retas $-2mx + 2y - 5 = 0$ e $x + 4y - 3 = 0$ é:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

d) $x^2 + y^2 + 2x = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

Resolução

Da fatoração básica, temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} \underbrace{(sen^2x + cos^2x)}_{=1}{}^3 = sen^6x + cos^6x + 3.sen^2x.cos^2x.\underbrace{(sen^2x + cos^2x)}_{=1} \\ \therefore \quad sen^6x + cos^6x = 1 - 3.sen^2x.cos^2x \\ \underbrace{(sen^2x + cos^2x)}_{=1}{}^2 = sen^4x + cos^4x + 2.sen^2x.cos^2x \\ \therefore \quad sen^4x + cos^4x = 1 - 2.sen^2x.cos^2x \end{cases}$$

Assim:

$$f(x) = 1 - 3.sen^2x.cos^2x + m.(1 - 2.sen^2x.cos^2x) =$$
$$= (1 + m) + sen^2x.cos^2x.(-3 - 2m)$$

Para f(x) ser constante, basta anular os termos que dependem de x. Para isso, basta que: $-3 - 2m = 0 \quad \therefore \quad m = -3/2$

Com isso, temos as retas: $\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ -x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$

A interseção delas é no ponto (1,1). Como a circunferência é tangente ao eixo y, devemos ter r = |Xc| onde Xc = abcissa do centro. Assim, a equação da circunferência é dada por: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

Desenvolvendo, chegamos à resposta:

$$\boxed{\text{Resposta: (E) } x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0}$$

Questão 4

Sendo a o primeiro termo de uma progressão geométrica, b o termo de ordem (n+1) e c o termo de ordem (2n + 1), então a relação entre a, b e c é:

a) $c^2 - ab + b^2 = 0$

b) $b^2 - ac^4 = 0$

c) $b^2 + a^2 + 4ab - c^2 = 0$

d) $b^4 + 2a^2cb + b^2c = 0$

e) $b^4 - 2acb^2 + a^2c^2 = 0$

Resolução

Do enunciado, sendo q a razão da PG:

$$\begin{cases} b = a.q^n \\ c = a.q^{2n} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow b^2 = ac$$

$$\Rightarrow (b^2 - ac) = 0$$

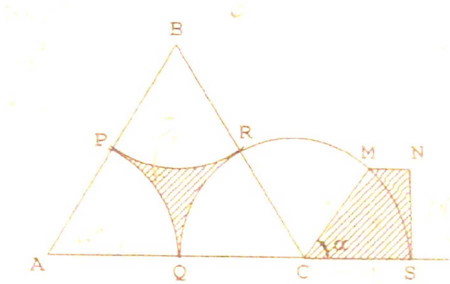
$$\Rightarrow (b^2 - ac)^2 = 0^2 = 0$$

$$\Rightarrow b^4 - 2.a.c.b^2 + a^2c^2 = 0$$

Resposta: (E) $b^4 - 2ac.b^2 + a^2c^2 = 0$

Questão 5

Na figura abaixo ABC é um triângulo eqüilátero de lado 2π e PQ(arco), PR(arco) e QR(arco) são os arcos de circunferência de raio r. Os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{CS}$ são perpendiculares ao segmento $\overline{NS}$ e QRS(arco) é uma semicircunferência de centro em C.

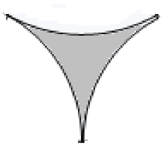


Se $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ e a soma das áreas hachuradas mede $\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)r^2 + \dfrac{5}{9}$ então o valor de r é?

a) $2^{-1/2}$ b) 2^{-4} c) $2^{1/4}$ d) $2^{1/2}$ e) 2

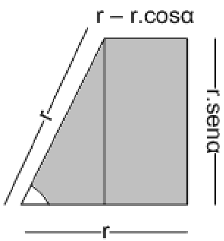
Resolução É útil calcular o cosseno do ângulo alfa: $\cos\alpha = \sqrt{1-\dfrac{4.3}{9}} = \dfrac{1}{3}$

A área interna hachurada no triângulo equivale à área total do triângulo menos a área de 3 setores circulares de 60º cada um. Assim, como o lado do triângulo é 2.r, temos:



$$= \frac{(2r)^2.\sqrt{3}}{4} - 3.\frac{\pi.r^2}{6} = r^2.\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$$

Como sabemos a soma das áreas hachuradas, nos restará que o trapézio terá 5/9 como área



$$= \frac{(r - r.\cos\alpha) + r}{2}.r.\operatorname{sen}\alpha$$

Com isso: $\dfrac{5}{9} = \dfrac{r^2.(2-\cos\alpha)}{2}.\operatorname{sen}\alpha = r^2\dfrac{5.\sqrt{2}}{9} \quad \therefore \quad r = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{-4}$

Resposta: (B) $r = 2^{-4}$

Questão 6

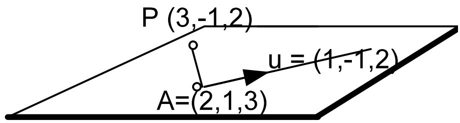
Considere π o plano que contem o centro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 13 = 0$ e a reta de equações paramétricas $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, $t \in \Re$. O volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados é, em unidades de volume:

a) $\frac{50}{3}$ b) $\frac{50}{9}$ c) $\frac{100}{9}$ d) $\frac{200}{9}$ e) $\frac{100}{3}$

Resolução

Completando quadrados na equação da esfera, teremos:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$$



Seja P o centro. P = (3,-1,2). A=(2,1,3) é um ponto da reta que tem como vetor diretor u = (1,-1,2).

Os vetores AP = P-A = (1,-2,1) e u definem o plano. O vetor normal ao plano é dado por:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5.i - 3.j + k \, // \, (5,3,-1)$$

Tendo o ponto A = (2,1,3) temos a equação do plano:

$$5x + 3y - z + c = 0 \quad \overset{(2,1,3)\in\pi}{\Rightarrow} \quad 10 + 3 - 3 + c = 0 \quad \therefore \quad c = -10$$

$$(\pi): \; 5x + 3y - z - 10 = 0$$

O plano define segmentos de comprimentos 2, 10 e 10/3 com os eixos coordenados (basta fazer x = y=0, x = z = 0 e y = z = 0).

O volume do tetraedro tri-retângulo é dado por:

$$V = \frac{2.10.(10/3)}{6} = \frac{100}{9}$$

$$\boxed{\text{Resposta: (C) } 100/9}$$

Questão 7

O valor de $\int 4\text{sen}(2x).\cos^2 x.dx$

a) $-\dfrac{\cos 2x}{2}+\dfrac{\cos 4x}{4}+C$ b) $-\cos 2x+\dfrac{\text{sen}^2 2x}{2}+C$

c) $-\dfrac{4\cos^3 x}{3}+C$ d) $-\dfrac{3}{2}\cos 2x+C$

e) $-\cos 2x-\dfrac{\cos 4x}{4}+C$

Resolução

$$\int 4.\text{sen}(2x).\cos^2 x.dx = 4.\int 2.\text{sen}x.\cos x.\cos^2 x.dx =$$

$$= -8.\int(-\text{sen}x).\cos^3 x.dx = -8.\frac{\cos^4 x}{4}+C_1 = -2.(\cos^2 x)^2+C_1$$

$$= -2.\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2+C_1 = -\frac{1}{2}.\left(1+2.\cos(2x)+\cos^2(2x)\right)+C_1$$

$$= -\frac{1}{2}-\cos(2x)-\frac{\cos^2(2x)}{2}+C_1 = -\frac{1}{2}-\cos(2x)-\frac{1+\cos(4x)}{4}+C_1$$

$$= -\cos(2x)-\frac{\cos(4x)}{4}+C$$

Resposta: (E) $-\cos(2x)-\dfrac{\cos(4x)}{4}+C$

Questão 8

A secretária de uma empresa tem a tarefa de enviar 5 cartas de cobrança, com diferentes textos e valores, para 5 diferentes clientes. Uma vez preparadas as cartas e os respectivos envelopes, a secretária pede à sua auxiliar que coloque as cartas nos envelopes e as remeta pela empresa de Correios. Supondo que a auxiliar não tenha percebido que os textos são diferentes e tenha colocado as cartas nos envelopes de forma casual ou aleatória, a probabilidade das cartas terem sido enviadas corretamente para cada destinatário é:

a) 0,15%
b) 0,24%
c) 0,25%
d) 0,83%
e) 0,92%

Resolução

Casos favoráveis: Há um único caso favorável (o que todas as cartas vão para o lugar certo).

Casos totais: Basta organizar 5 cartas distintas em um fileira de 5 elementos. 5! = 120 casos.

A probabilidade pedida será dada por P = (casos favoráveis)/(casos totais) .

Portanto, a probabilidade é de 1/120 = 0,008333...

Resposta: (D) 0,83%

Questão 9

O resto da divisão do polinômio $M(x) = \sum_{j=1}^{80} (3j)(x+1)^{80-j}$ pelo polinômio

$N(x) = x + 2$, $x \in \Re$, é igual a

a) 120
b) 80
c) 60
d) 40
e) 0

Resolução

Pelo teorema do resto de D´Alembert, o resto de M(x) por (x+2) é dado por M(-2).

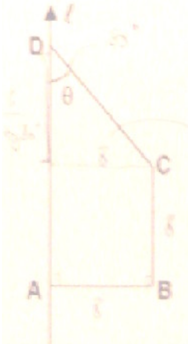
$$M(-2) = \sum_{i=1}^{80} (3i).(-1)^{80-i} = -3 + 6 - 9 + 12 - 15 + 18 + \ldots - 3.79 + 3.80$$

$$= \underbrace{(6 + 12 + 18 + \ldots + 3.80)}_{\text{PA de razao 6}} - \underbrace{(3 + 9 + 15 + \ldots + 3.79)}_{\text{PA de razao 6}}$$

$$= \frac{(6 + 3.80).40}{2} - \frac{(3 + 3.79).40}{2} = 120$$

$$\boxed{\text{Resposta: (A) } 120}$$

Questão 10

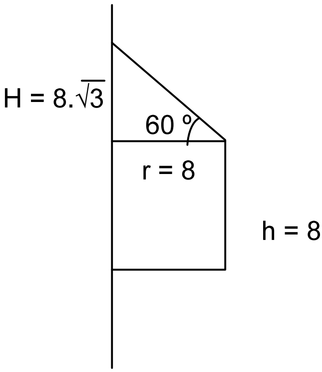


O trapézio retângulo ABCDA, representado na figura abaixo, faz uma rotação completa em torno do eixo *l*, gerando um sólido **s**. Sabendo que os segmentos AB e BC e o ângulo θ têm por medida 8cm, 8cm e 30°, respectivamente, e que o volume de **S** vale o dobro do volume de uma esfera de raio **R,** pode-se concluir que o comprimento de R, em cm, é:

a) $2(\sqrt{3}+1)^{1/3}$ b) $4(\sqrt{3}+3)^{1/3}$ c) $2(\sqrt{3}+3)^{1/3}$

d) $8(\sqrt{3}+1)^{1/3}$ e) $4(\sqrt{3}+1)^{1/3}$

Resolução



O volume é a soma de um cone e um cilindro, que somam o volume de 2 esferas de raio R.

$$V_{cilindro} + V_{cone} = 2.\frac{4}{3}\pi.R^3 \quad \Rightarrow \quad \pi.r^2.h + \frac{\pi.r^2.H}{3} = 2.\frac{4}{3}\pi.R^3$$

$$\Rightarrow \quad \pi.8^2.8 + \frac{\pi.8^2.8.\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{3}\pi.R^3$$

$$\Rightarrow \quad R = 4\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{3}\right)}$$

$$\boxed{\text{Resposta: (B)} \quad R = 4\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{3}\right)}}$$

Questão 11

Os ângulos α e β na figura abaixo são tais que $\beta = \alpha + \frac{\pi}{12}$, e a equação da reta r é y = x – 2. Então $tg(\alpha + \beta)$ vale:

a) $-2 + \sqrt{3}$

b) $-\sqrt{3}$

c) $-2 - \sqrt{3}$

d) $-2\sqrt{3}$

e) $-2\sqrt{3} + 2$

Resolução

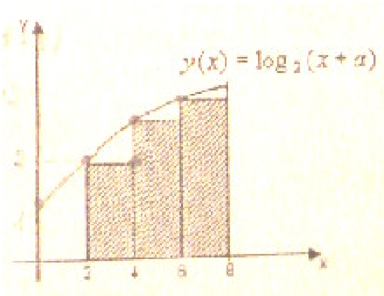
Do coeficiente angular da reta r, temos que α = π/4. De onde segue que β = π/3. Portanto:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha . tg\beta} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

Resposta: (C) $-2 - \sqrt{3}$

Questão 12

No sistema cartesiano abaixo está esboçada uma porção do gráfico de uma função $y(x) = \log_2(x + a)$ restrita ao intervalo [2,8], $a \in \Re^*_+$. Se y(2) = 2, então o valor da área hachurada é:



a) $6 + \frac{3}{2}\log_4 3$ b) $12 + \log_2 3$ c) $8 + 2\log_2 3$

d) $6 + 8\log_{\frac{1}{2}} 3$ e) $12 + \log_{\sqrt{2}} 3$

Resolução

Do enunciado:

$$y(2) = 2 \Rightarrow \log_2(2 + a) = 2 \Rightarrow 2 + a = 4 \Rightarrow a = 2$$

A soma das áreas é dada por:

$$2.y(2) + 2.y(4) + 2.y(6) = 2.(\log_2 4 + \log_2 6 + \log_2 8)$$
$$= 2.(2 + \log_2(2.3) + 3)$$
$$= 2.(5 + \log_2 2 + \log_2 3)$$
$$= 12 + 2.\log_2 3 = 12 + \log_{\sqrt{2}} 3$$

Resposta: (E) $12 + \log_{\sqrt{2}} 3$

Questão 13

Considere $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ e vetores no $\Re^3$ que satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = (2, -1, -2) \\ \vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z} = (5, -2, -8) \\ \vec{x} + 4\vec{y} + 9\vec{z} = (15, -6, -24) \end{cases},$$

o produto $\vec{x} \bullet (\vec{y} \times \vec{z})$ vale

a) -1
b) 0
c) 1/2
d) 1
e) 2

Do sistema:

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = (2, -1, -2) & \text{I} \\ \vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z} = (5, -2, -8) & \text{II} \\ \vec{x} + 4\vec{y} + 9\vec{z} = (15, -6, -24) & \text{III} \end{cases}$$

Fazendo (II – I) e (III – II):

$$\begin{cases} \vec{y} + 2\vec{z} = (3, -1, -6) & \text{IV} \\ \vec{y} + 3\vec{z} = (5, -2, -8) & \text{V} \end{cases}$$

Fazendo (V- IV) e resolvendo, acharemos:

$$\begin{cases} \vec{x} = (1, -1, 2) \\ \vec{y} = (-1, 1, 2) \\ \vec{z} = (2, -1, -2) \end{cases}$$

O produto misto pedido é nulo, uma vez que x e y são vetores paralelos (os 3 vetores não formam volume!)

Resposta: (B) 0.

Questão 14

Sejam *f* e *g* funções reais definidas por $f(x) = 2sen^2x + 6\cos x$ e $g(x) = k + \cos 2x$, $k \in \Re$, se $f\left(\frac{\pi}{3}\right) + g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{19}{2}$, então a soma das soluções da equação f(x) = g(x) no intervalo $\left]\frac{21\pi}{11}, \frac{16\pi}{5}\right[$ é

a) $\frac{13\pi}{6}$

b) $\frac{13\pi}{3}$

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) $\frac{25\pi}{6}$

e) $\frac{16\pi}{3}$

Resolução

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9/2 \quad \Rightarrow \quad g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 5 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)}_{=0} + k = 5 \quad \Rightarrow \quad k = 5$$

Da igualdade, f(x) = g(x), teremos:

$$5 + \cos(2x) = 2.sen^2x + 6.\cos x \quad \Leftrightarrow \quad 5 + 2\cos^2x - 1 = 2 - 2.\cos^2x + 6.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2.\cos^2x - 3.\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = 1 \ \text{ ou } \ \cos x = 1/2$$

As soluções no intervalo estipulado são: $x = 2\pi$ e $x = \frac{7\pi}{3}$ cuja soma é $\frac{13\pi}{3}$

Resposta: (B) $\frac{13\pi}{3}$.

Questão 15

Sejam L_1 a reta tangente ao gráfico da função real $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3x}}$ no ponto P(-1,f(-1)) e L_2 a reta tangente ao gráfico da função y = f ' (x) no ponto $Q(-1, f'(-1))$. A abscissa do ponto de interseção de L_1 e L_2 é

a) $-\frac{1}{9}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{3}$ e) 1

Resolução

Utilizando a regra da cadeia:

$$f'(x) = \frac{2x-3}{2.\sqrt{x^2-3x}}.e^{\sqrt{x^2-3x}} \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = -\frac{5e^2}{4}$$

Derivando mais uma vez:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2.\sqrt{x^2-3x} - \dfrac{(2x-3).(2x-3)}{2.\sqrt{x^2-3x}}}{x^2-3x}\right).e^{\sqrt{x^2-3x}} + \frac{(2x-3)}{\sqrt{x^2-3x}}.\frac{(2x-3)e^{\sqrt{x^2-3x}}}{2\sqrt{x^2-3x}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad f''(-1) = \frac{41e^2}{32}$$

Achando as equações de L_1 e L_2:

$$\begin{cases} L_1: \ (y - f(-1)) = f'(-1).(x-(-1)) \\ L_2: \ (y - f'(-1)) = f''(-1).(x-(-1)) \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} L_1: \ (y - e^2) = -\dfrac{5e^2}{4}.(x+1) \\ L_2: \ \left(y + \dfrac{5.e^2}{4}\right) = \dfrac{41.e^2}{32}.(x+1) \end{cases}$$

Resolvendo quanto à abcissa:

$$\boxed{\text{Resposta: (A) } -\frac{1}{9}}$$

Questão 16

A função real f, de variável real é definida por $f(x) = \ln(x^5 + x^3 + x)$. Podemos afirmar que a equação da reta normal ao gráfico da função inversa f^{-1} no ponto $(\ln 3, f^{-1}(\ln 3))$ é

a) $y - 3x + 3\ln 3 = 1$ b) $3y - x + \ln 3 = 3$ c) $y + 3x - \ln 27 = 1$
d) $3y + x - \ln 3 = -3$ e) $y + 3x - \ln 3 = 3$

Resolução

Sabemos que $f(1) = \ln 3$ e a derivada da função inversa de f é:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Sabemos também que:

$$(\ln x)' = \frac{5.x^4 + 3.x^2 + 1}{x^5 + x^3 + x} = f'(x) \qquad \Rightarrow \; f'(1) = 3$$

Daí segue que: $\left(f^{-1}\right)'(\ln 3) = \dfrac{1}{3} \qquad \Rightarrow \quad m_{normal} = -\dfrac{1}{1/3} = -3$

A equação desta reta será:

$$\left(y - \left(f^{-1}(\ln 3)\right)\right) = -3.(x - \ln 3) \qquad \Rightarrow \quad y - 1 = -3.(x - \ln 3)$$

Resposta: (C) $y + 3x - \ln 27 = 1$

Questão 17

Considere y = f(x) uma função real, de variável real, derivável até a 2ª ordem e tal que f '' (x) + f (x) = 0, $\forall x \in \Re$. Se g(x) = f '(x)senx – f(x)cosx + cos²x, então:

a) $g(x) = \frac{sen2x}{2} + C$ b) $g(x) = C$ c) $g(x) = \frac{\cos 2x}{2} + C$

d) $g(x) = 2f(x) - \frac{\cos 2x}{2} + C$ e) $g(x) = senx + \cos^2 x + C$

Resolução

Derivando g(x):

$$g'(x) = f''(x).senx + \cancel{f'(x).\cos x} - \cancel{f'(x).\cos x} + f(x).senx - \underbrace{2.\cos x.senx}_{sen(2x)}$$

$$= senx.\underbrace{\left(f''(x) + f'(x)\right)}_{=0} - sen(2x) = -sen(2x)$$

Integrando, teremos g(x): $g(x) = \int g'(x).dx = \int\left(-sen(2x)\right).dx = \frac{\cos(2x)}{2} + C$

$$\boxed{\text{Resposta: (C) } g(x) = \frac{\cos(2x)}{2} + C}$$

Questão 18

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -1 \\ 2x^2 & -3 & 3x^2 & -1-2x^2 \\ 5 & 4 & mx^2 - nx + 2 & 2x^2 + 3x - 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4x4}$$

e o polinômio $p(x) = x^2 - 2x - 3$, onde **x, m** e **n** pertencem ao conjunto $\Re$. Se o determinante da matriz A é divisível pelo polinômio p(x) podemos afirmar que o termo de ordem (m+n) do binômio

$$\left(\frac{x^2y}{5} - 5z^3\right)^7$$

é:

a) $-7x^8y^4z^9$ b) $14x^8y^4z^9$ c) $-7x^6y^4z^6$ d) $-14x^6y^4z^9$

e) $14x^6y^4z^6$

Resolução

Para haver divisibilidade, as raízes -1 e 3 (do polinômio divisor) devem ser raízes do polinômio dividendo. Dessa forma:

$$\det A(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & m+n+2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Laplace}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & m+n+2 & -6 \end{vmatrix}$$

Para que o determinante seja nulo, basta que as colunas 2 e 3 sejam proporcionais, o que nos dá: m + n = 4. Utilizando o desenvolvimento do binômio de Newton para o 4º termo.

$$T_4 = C_7^3.\left(\frac{x^2.y}{5}\right)^4.\left(-5.z^3\right)^3 = -7.x^8.y^4.z^9$$

$$\boxed{\text{Resposta: (A) } -7.x^8.y^4.z^9}$$

Questão 19

Seja f a função real de variável real, definida por f(x) = $\sqrt[3]{x^3 - x^2}$. Podemos afirmar que:

a) f é derivável $\forall x \in \Re^*$

b) f é crescente $\forall x \in \Re_+$

c) f é positiva $\forall x \in \Re_+$ e (1, f(1)) é o ponto de inflexão

d) a reta 3y - 3x + 1 = 0 é uma assíntota do gráfico da f e (0, f(0)) é o ponto de máximo local.

e) f é derivável $\forall x \in \Re^*$ - {1} e 3y – 3x – 1 = 0 é uma assíntota do gráfico da f.

Resolução

Achando a derivada nos pontos em que f é derivável:

$$f'(x) = \frac{1}{3}.\frac{3x^2 - 2x}{\left(x^3 - x^2\right)^{2/3}}$$

O que nos sugere que a derivada não existirá para x = 0 ou x = 1. De fato:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x-1} = -\infty$$

Como os limites não existem, a função não é derivável em x = 0 nem em x = 1. (Letra A é falsa!). A primeira derivada assume valores negativos entre 0 e 2/3, logo f não é estritamente crescente em todo R*. (Letra B é falsa). A função f é negativa para x = -1, por exemplo, o que torna a Letra C falsa.

Achando a assíntota y = mx+h ao gráfico:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-(1/x)} = 1$$

$$h = \lim_{x\to\infty} f(x) - m.x = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\underbrace{x}_{\to\infty}.\underbrace{\left(\sqrt[3]{1-(1/x)}-1\right)}_{\to 0}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1-(1/x)}-1\right)}{1/x} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\left(1-(1/x)\right)^{2/3}.(1/x^2)\right)}{-(1/x^2)} = -\frac{1}{3}$$

Logo, a equação da assíntota é dada por: $y = x - 1/3 \quad \therefore \quad 3y - 3x + 1 = 0$

A afirmação acima torna a Letra E falsa. Basta provarmos que (0,f(0)) é máximo local.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3}.\dfrac{3x^2 - 2x}{\left(x^3 - x^2\right)^{2/3}} < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{3}.\dfrac{3x^2 - 2x}{\left(x^3 - x^2\right)^{2/3}} > 0 \end{cases}$$

O que significa que f decresce à direita de 0 e cresce à esquerda. Logo, apesar de haver um ponto de não derivabilidade (um “bico”), este ponto é um ponto de máximo local!

Resposta: (D)

Questão 20 Considere os conjuntos A = $\left\{x \in \Re / \left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 4\right\}$ e B = $\left\{x \in \Re / \log_9(x^2 - 5x + 7) > 0\right\}$. Pode-se afirmar que $A \cap B$ é:

a) $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{26}{7}, +\infty\right[$

b) $\left]-\infty, \frac{10}{9}\right[\cup]2, +\infty[$

c) $]-\infty, -3[\cup \left]-2, \frac{10}{9}\right[$

d) $\left]-\infty, \frac{10}{9}\right[\cup]3, +\infty[$

e) $]-\infty, -3[\cup \left]\frac{26}{7}, +\infty\right[$

Resolução

O conjunto A gera a seguinte condição de existência.

$$-4 < \frac{x+2}{2x-3} < 4 \iff \begin{cases} \dfrac{x+2}{2x-3} + 4 > 0 \\ \dfrac{x+2}{2x-3} - 4 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{9x-10}{2x-3} > 0 \\ -7.\left(\dfrac{x-2}{2x-3}\right) < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < 3/2 \text{ ou } x > 2 \\ x < 10/9 \text{ ou } x > 3/2 \end{cases}$$

$$\iff A = \{x \text{ tal que } x < 10/9 \text{ ou } x > 2\}$$

O conjunto B gera a condição:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 1 \\ x^2 - 5x + 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow x < 2 \text{ ou } x > 3$$

A interseção de A com B, nos dá:

Resposta: (D) $x < \dfrac{10}{9}$ ou $x > 3$