Escola Naval – Gabarito Comentado PSAEN 2006 - PROVA ROSA
Elaborado por alunos do ITA: Caio Guimarães, Ishai Elarrat, Felipe Moraes

---

1. Seja x = base – d1 – d2.

Da figura:

$$\begin{cases} x = h.ctg\beta \\ x + d_1 = h.ctg\alpha \end{cases} \Rightarrow d_1 = h.(ctg\alpha - ctg\beta) \Rightarrow h = \frac{d_1}{(ctg\alpha - ctg\beta)}$$

$$S = \frac{d_2.h}{2} \Rightarrow S = \frac{d_1.d_2}{2(ctg\alpha - ctg\beta)}$$ (Opção E)

---

2. Comentário: Nessa questão, faltou ser indicado que o desenvolvimento do binômio em questão deveria ser considerado desenvolvido segundo a ordem dos termos decrescentes das potências de x.

$$T_1 = C(n,0).(x^{2n})$$

$$T_2 = C(n,1).(x^{2n-1}).(\frac{1}{2x})^1 = \frac{n}{2}.x^{2n-2}$$

$$T_3 = C(n,2).(x^{2n-2}).(\frac{1}{2x})^2 = \frac{n(n-1)}{8}.(x^{2n-4})$$

Como os termos estão em PA:

$$Termo_3 + Termo_1 = 2Termo_2 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{8} + 1 = n \Rightarrow n(n-1) = 8.(n-1) \Rightarrow n = 1, n = 8$$

Como n=1 nos dá somente 2 termos no desenvolvimento, n=8

$$(\frac{8}{2}) - 1 = \text{razão} \Rightarrow a_{11} = a_1 + 10.r = 1 + 10.3 = 31$$ (Opção C)

3.

i) f(-x) = -x + 2 . arctg (-x) = -x - 2. arctg (x) = - (x + arctg x) = - f(x) . Logo f é uma função ímpar. Com isso temos que f deverá ser simétrica em relação à origem.

ii) $f'(x) = 1 + \frac{2}{1+x^2} > 0, \forall x \Rightarrow$ f é estritamente crescente em todo seu domínio

iii) $$f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$

Logo antes do 0, f tem concavidade pra cima, e depois para baixo

De (i) ,(ii) e (iii) concluímos que o grafico tem o esboço de : (Opção A)

---

4. W é um vetor normal a U e V, logo é um vetor paralelo ao produto vetorial u x v . Para t real temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-i + k + i - j).t = (0,-t,t)$$

Achando os vetores unitários paralelos ao produto vetorial(lembrando que $-t > 0$) :

$$\sqrt{0^2 + (-t)^2 + t^2} = \sqrt{2}.|t| = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos T = \frac{(\sqrt{2}\vec{w} + \vec{u}).(-\vec{v})}{|\sqrt{2}\vec{w} + \vec{u}|.|-\vec{v}|}$$

$$= \frac{[(0,1,-1) + (-1,1,1)].[(0,1,1)]}{|(0,1,-1) + (-1,1,1)|.|[0,-1,-1|} = \frac{(-1,2,0).(0,1,1)}{\sqrt{5}.\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}.\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Logo,

$$\operatorname{sen} T = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})^2} = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \csc(2T) = \frac{1}{2.\operatorname{sen} T.\cos T} = \frac{5}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

(Opção B)

---

5. $$8y = \frac{x^6 + 2}{x^2} = x^4 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow 8.(\frac{dy}{dx}) = 4x^3 - \frac{4}{x^3} \Rightarrow (\frac{dy}{dx}) = \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

Fazendo $u = x^3$, temos que $dx = du/(3x^2)$

$$\int x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x^3}\right)\right)^2} dx = \int x^2 \sqrt{\frac{(4 + x^6 - 2 + x^{-6})}{4}} dx$$

$$= \int \frac{du}{3}.\frac{1}{2}\sqrt{u^2 + 2 + \frac{1}{u^2}} = \frac{1}{6}\int du.\sqrt{(u + \frac{1}{u})^2} = \frac{1}{6}\int |(u + u^{-1})|.du = -\frac{u^2}{12} - \frac{\ln|u|}{6} + C$$

Substituindo novamente na variável x:

$= -\frac{x^6}{12} - \frac{\ln|x|}{2} + C$ (Opção D)

---

6. $V=\pi.r^2h=1\Rightarrow h=\dfrac{1}{\pi.r^2}$

Seja f(r) a função na variável positiva r que nos dê o gasto em função do tamanho do raio do cilindro.

$$\begin{aligned} f(r) &= 1000.(\pi.r^2)+2000.(\pi.r^2)+1000.(2\pi.r.h)\\ &= 3000.(\pi.r^2)+2000.(\pi.r.\frac{1}{\pi.r^2})=3000.(\pi.r^2)+2000.r^{-1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(r)=6000.(\pi.r)-\frac{2000}{r^2}=0\Leftrightarrow r=\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$$

Discussão do sinal da 1ª derivada:

$$\begin{cases} r>\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}\Rightarrow f'(r)>0\\ r<\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}\Rightarrow f'(r)<0\end{cases}\Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$$ é um ponto de mínimo pois f(r) é derivável pra todo r

Temos que $h=\dfrac{1}{\pi.r^2}\Rightarrow h=\sqrt[3]{\dfrac{9}{\pi}}$

Considerando que as dimensões pedidas são raio e altura, a opção correta é : (Opção D)

---

7. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx=I$ Fazendo $u=e^{2x}\Rightarrow du=2e^{2x}.dx$

$$I=\int\frac{e^{2x}}{1+u^2}.\frac{du}{2.e^{2x}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}.\mathrm{Arc}\tan(u)+C=\frac{1}{2}.\mathrm{Arc}\tan(e^{2x})+C$$

$$=\frac{1}{2}.\mathrm{Arc}\cot(e^{-2x})+C=-\frac{1}{2}.\mathrm{Arc}\cot(e^{2x})+C$$ (Opção E)

8.

$$\begin{cases} x<-1\Rightarrow\begin{cases}|x+1|=-x-1\\|1-2x|=1-2x\\|2x-3|=3-2x\end{cases}\\ -1\le x<\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}|x+1|=x+1\\|1-2x|=1-2x\\|2x-3|=3-2x\end{cases}\end{cases}\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}|x+1|=x+1\\|1-2x|=2x-1\\|2x-3|=3-2x\end{cases}\\ x\ge\dfrac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}|x+1|=x+1\\|1-2x|=2x-1|\\|2x-3|=2x-3\end{cases}\end{cases}$$

i) $x < -1 \Rightarrow \begin{cases} |1-2x| + |x+1| - |2x-3| > 2 \Leftrightarrow \\ 1-2x-x-1-3+2x > 2 \Leftrightarrow \\ x < -5 \end{cases}$

ii) $-1 \le x < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |1-2x| + |x+1| - |2x-3| > 2 \Leftrightarrow \\ 1-2x+x+1-3+2x > 2 \Leftrightarrow \\ x > 3 \end{cases}$

Não existe x nesse intervalo que satisfaça a condição inicial

iii) $\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} |1-2x| + |x+1| - |2x-3| > 2 \Leftrightarrow \\ 2x-1+x+1-3+2x > 2 \Leftrightarrow \\ 5x > 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2} > x > 1 \end{cases}$

iv) $\frac{3}{2} \le x \Rightarrow \begin{cases} |1-2x| + |x+1| - |2x-3| > 2 \Leftrightarrow \\ 1-2x+x+1-2x+3 > 2 \Leftrightarrow \\ -3x > -3 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$

Fazendo a intersecção , temos: $x \in (-\infty, -5) U (1, +\infty)$ (opção E)

---

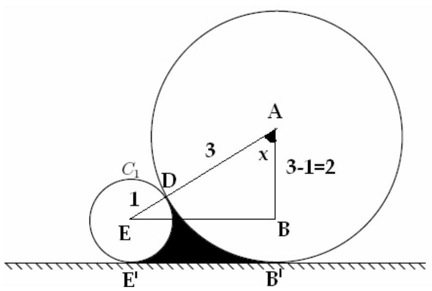
9. A função f está definida para todo x que atende à condição:

$$\frac{9}{16} - \left(\frac{4}{3}\right)^{1-x} > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1-x} \Leftrightarrow -2 > 1-x \Leftrightarrow x > 3$$

Como x é o menor inteiro que atende a essa condição, x=4

$\log_4 2\sqrt{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\log_2 2^{1+1/2+1/4} = \frac{7}{8}$ que pertence ao intervalo [1/2 , 1] (opção A)

10.



$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 60^o \Rightarrow \begin{cases} \text{arcoB´D} = \frac{2\pi.3}{6} = \pi \\ \text{arcoE´D} = \frac{2\pi.1}{3} \\ EB = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$$S_{C_3} = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{5\pi}{3} + 2\sqrt{3} = \pi.R^2$$

$$\Rightarrow R_{C_3} = \sqrt{\frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}}$$

(Opção A)

11. Substituindo x´ = 1/x , y´= 1/y , z´= 1/y . O sistema será Possível e Indeterminado quando o novo sistema também for.

$$\begin{cases} x' - 2y' + z' = 0 \\ ax' + y' + 2z' = 0 \\ 3x' - y' - 4z' = 0 \end{cases}$$

Sistema Homogêneo => P. Indeterminado ⇔ Det. Principal = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4 - 12 - a - 3 + 2 - 8a = 0 \Leftrightarrow -9a = 17 \Leftrightarrow a = -\frac{17}{9}$$

(Opção D)
** OBS: Esse é um sistema homogêneo não linear, portanto existe a possibilidade desse sistema ser impossível, já que não admite a solução trivial (x,y,z)=(0,0,0)

---

12. O Resto de P(x) na divisão por 4x +2 é dado por P(-1/2) - (D´ Alembert)

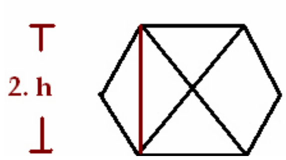
$$P\left(\frac{-1}{2}\right) = 8m^3.\left(\frac{-1}{2}\right)^4 + 12m.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 1 = \frac{1}{2}(m^3 - 3m + 2)$$

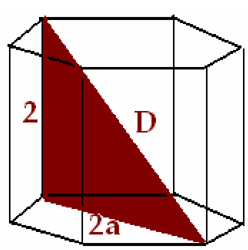
$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(m-1)^2(m+2) > 0 \Leftrightarrow m > -2, m \neq 1$$

Logo o resto é positivo, se e somente se m é tal que : $m \in]-2,1[\cup]1,+\infty[$

(Não há resposta)
** OBS: A questão deverá ser anulada, pois não apresenta a condição que m deve obedecer para que o resto seja positiva, como pede o enunciado.

13.





h é a altura do triangulo eqüilátero de lado a (onde a é a aresta da base do prisma
$\Rightarrow$ d = 2h

$$D = \frac{2\sqrt{30}}{9}.d = \frac{2\sqrt{30}}{9}.(2.\frac{a\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow D = \frac{2a\sqrt{10}}{3}$$

$$D^2 = 2^2 + 4a^2 \Rightarrow \frac{4a^2.10}{9} = 4 + 4a^2 \Rightarrow a = 3$$

Portanto:

$$V = 6.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2 = 27\sqrt{3} = 3^{7/2}$$

$$\Rightarrow f(v) = 2.(V)^{-1/3} = 2.\frac{1}{3^{7/6}} = \frac{2.}{3^{2-(5/6)}} = \frac{2.(243)^{1/6}}{9}$$

(Opção C)

---

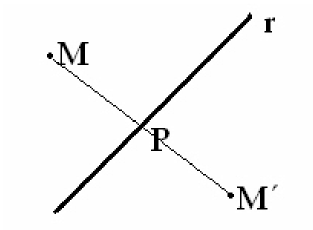
14. $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i = 16.\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ 4\arg(Z) = \frac{2\pi}{3} + 2k.\pi,\ k \in Z \end{cases}$

Como as equações possuem coeficientes reais, sabemos que o conjugado de z deverá ser a 2ª raiz da equação. O produto das raízes , que por Girard é (c/a), vale $z.\bar{z} = |z|^2 = 2^2 = 4$

Portanto, a única equação possível será a que o termo independente é 4. (Opção A)

**OBS: Poderíamos ter encontrado o Z dado o sistema, montado e verificado que era raiz da equação da opção A

15.



Seja r a reta de simetria.

r: $\frac{(y - Ya)}{(x - Xa)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3-(-2))}{-1-4} = -1 \Rightarrow r: y + x = 2$

O ponto P pode ser parametrizado P = (t, 2-t) , tomando o vetor de extremos M e P = M-P = (3-t, 2+t) , temos que esse vetor deverá ser paralelo ao vetor (1,1) , vetor normal de r.

De onde tiramos que 3-t = 2+t => t= ½

$2P = M + M` \Rightarrow M´ = 2P - M = (1,3) - (3,4) = (-2,-1)$

M` atende à equação : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ (Opção C)

---

16. Pela definição de continuidade no ponto x=7, temos que:

$$\lim_{x\to 7} f(x) = a \Rightarrow \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x^2+15} - 8} = a$$

Aplicando L´Hospital:

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x^2+15} - 8} = \lim_{x\to 7} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+15}}} = \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x^2+15}}{2.x\sqrt{x}} = \frac{4}{7\sqrt{7}} = a$$

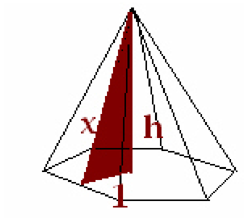
Derivando g(x):

$$g´(x) = 2\ln\left(2x + \frac{6}{7}\right).\frac{2}{\left(2x + \frac{6}{7}\right)}$$

(Opção D)

$$\Rightarrow g´(\sqrt{7}a) = 4\ln\left(\frac{8}{7} + \frac{6}{7}\right).\frac{1}{\left(\frac{8}{7} + \frac{6}{7}\right)} = 2\ln 2 = \ln 4$$

17.



Seja L a aresta da base e ´´a´´ a aresta do cubo.

$$\frac{L\sqrt{3}}{2}=1$$

$$\begin{cases} h = 2.a.\sqrt{3} \\ a^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = h^2 + 1 \Rightarrow x = 7$$

$$\begin{cases} A_{lat-piramide} = \dfrac{6.L.x}{2} = 3.\dfrac{2}{3}\sqrt{3}.7 = 14.\sqrt{3}cm^2 \\ A_{cubo} = 6.a^2 = 24cm^2 \end{cases}$$

$$\text{Razão} = \frac{14\sqrt{3}}{24} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

(Opção B)

---

18. $(sen^2x + cos^2x) = 1 \Rightarrow (sen^2x + cos^2x)^2 = 1$

$$\Rightarrow sen^4x + cos^4x + 2.(senx.cos x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} + 2\left(\frac{sen2x}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow sen2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $0 < x < \pi$ => $0 < 2x < 2\pi$ **e portanto as solu**ções admitidas serão:
$2x = \{ \pi/3 , 2\pi/3 , 4\pi/3, 5\pi/3 \}$. Logo $x = \{ \pi/6 , \pi/3 , 2\pi/3 , 5\pi/6\}$

Soma dos inversos: $6/\pi + 3/\pi + 3/(2\pi) + 6/(5\pi) = (90 + 15 + 12)/(10\pi) = 117/(10\pi)$
(Opção B)

---

19. $$y´(x) = \left(e^{(x-\pi/2)^3}\right)3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2.\cos\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right) + 2\left(e^{(x-\pi/2)^3}\right)sen\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)$$

$$= \left(e^{(x-\pi/2)^3}\right)\left[3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2.\cos\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right) + 2sen\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)\right]$$

$$y´\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right) \Rightarrow L : \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Achando os pontos P e Q :

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow P = (0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\pi + 1)) \\ y = 0 \Rightarrow Q = (\dfrac{1+\pi}{2}, 0) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\pi+1).\dfrac{1+\pi}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\pi+1)^2}{8}$$

(Opção B)

20.

$$g(x) = f(x^2) \Rightarrow g´(x) = f´(x^2).2x = 2x.sen(\cos\sqrt{x^2}) = 2x.sen(\cos|x|)$$

$$x > 0 \Rightarrow g´(x) = 2x.sen(\cos x)$$

$$g´(x^2) = 2.x^2.sen(\cos(x^2))$$

(Opção C)